**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC- CTC**

**DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMO**

**Prof. Alexandre Gonçalves Silva**

**Aluno: Osmar de Oliveira Braz Junior**

# Questão 5

5. Use o **teorema mestre** para determinar o tempo de execução dos algoritmos expressos pelas recorrências abaixo:

(Manber)- (slide 72 aula0825)

Onde, a >= 1, e b >=2, k >=0, onde a e b são números naturais e c>0 um número real positivo.

Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes a ≥ 1 e b >= 2 e a função f(n) assintoticamente positiva.

Caso 1, se ou então T está em Θ(

Caso 2, se ou então T está em Θ(Θ(

Caso 3, se ou então T está em Θ(

(CLRS)-(slide 78 aula0825)

Sejam a >= 1 e b >1 constantes, seja f (n) uma função e seja T(n) definida para os inteiros não-negativos pela relação de recorrência

Então T(n) pode ser limitada assintoticamente da seguinte maneira:

Caso 1: se para alguma constante ϵ > 0, então

Caso 2: se , então

Caso 3: se, para alguma constante ϵ > 0 e se , para alguma constante c <1 e para n suficientemente grade, então

(a) **T(n) = T(n/2) + Θ(1)**

R.:

a=1

b=2

f(n)= 1

= =

Compara:

) ou seja,

= // É igual, portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = T(n/2) + Θ(1)

)

)

)

Então,

//CLRS

)

. está ok

Então T(n)= .

(b) **T(n) = 2T(n/2) +**

R.:

a=2

b=2

k=3 //Expoente de n

f(n) =

= Θ(==Θ(

Compara:

) ou seja,

// Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

//Portanto não é o caso 1

//Caso 3

//Portanto é o caso 3

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto

f(n) ∈ Ω( )

. Se ϵ=

. está ok

Então T(n)= .

(c) **T(n) = T(9n/10) + n**

R.:

a=1

b=9/10

k=1 //Expoente de n

f(n)= n

= =

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

<> // Não é igual, portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

0 > 1 //Portanto não é o caso 1

//Caso 3

0 < 1 //Portanto é o caso 3

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto

f(n) ∈ Ω( )

. Se ϵ=

. está ok

Então .

(d) **T(n) = 16T(n/4) +**

R.:

a=16

b=4

k=2 //Expoente de n

f(n) =

= Θ(=

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

= Θ( //É igual portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = 16T(n/4) +

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

Então T(n)=

(e) **T(n) = 7T(n/3) +**

R.:

a=7

b=3

k=2 //Expoente de n

f(n) =

= Θ(= => 1,771243749

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

= Θ()

<> Θ( // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

1,771243749 > 2 //Portanto não é o caso 1

//Caso 3

1,771243749 < 2 //Portanto é o caso 3

//CLRS

f(n) ∈ O( )

=

=

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = 7T(n/3) +

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

Então T(n)=

(f) **T(n) = 7T(n/2) +**

R.:

a=7

b=2

k=2 //Expoente de n

f(n) = O()

Θ()= Θ( ) => 2,807354922

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

<> // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

2,807354922 > 1 //Portanto é o caso 1

//Caso 3

2,807354922 < 1 //Portanto não é o caso 3

Temos o Caso 1 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = T(n/2) + Θ()

Então T(n)=

(g) **T(n) = 2T(n/4) +**

R.:

T(n) = 2T(n/4) +

a=2

b=4

k= //Expoente de n

f(n)=

= =>

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

= // É igual portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = 2T(n/4) +

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

Então T(n)= ou

(h) **T(n) = 3T(n/2) + n log n**

R.:

a=3

b=2

k=1 //Expoente de n

f(n)=

= Θ( )=) => 1,584962501

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

<> // Não é igual, portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

1,584962501 > 1 //Portanto é o caso 1

//Caso 3

1,584962501 < 1 //Portanto não é o caso 3

Temos o Caso 1 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = Θ()

Então T(n) = Θ() ou T(n) = Θ()

(i) **T(n) = 4T(n/2) +**

R.:

T(n) = 4T(n/2) +

T(n) = 4T(n/2) +

T(n) = 4T(n/2) +

T(n) = 4T(n/2) +

a=4

b=2

k= //Expoente de n

f(n)=

= =>

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

<> // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

2 > //Portanto não é o caso 1

//Caso 3

2 < //Portanto é o caso 3

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = Θ()

Então T(n)= ()

(j) **T(n) = 27T(n/3) +**

R.:

a=27

b=3

k=3

f(n) =

=

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

= // É igual portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = 27T(n/3) +

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

Então T(n)=

(k) **T(n) = 64T(n/4) +**

R.:

a=64

b=4

k=2 //Expoente de n

f(n) =

=

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

<> // Não é igual, portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

3 > //Portanto é o caso 1

//Caso 3

3 < //Portanto não é o caso 3

Temos o Caso 1 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = Θ()

T(n) = Θ()

Então T(n)=()

(l) **T(n) = 4T(n/2) + log n**

R.:

a=4

b=2

k=? //Expoente de n

1ª Forma de resolução

Compara:

f(n) = Θ() ou seja,

log n <> // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre

//Caso 1

2 > ? //Portanto não é o caso 1

//Caso 3

2 < //Portanto não é o caso 3

Desta forma não foi possível resolver pela falta de k.

2ª Forma de resolução

Compara:

= para encontrar :

, caso 3 (a ser testado)

Verificando se o valor de c<1:

Observe que o denominador () sempre excederá o numerador () em uma unidade. Conclui-se que a fração sempre será menor que 1, confirmando que c<1.

Resumindo, ϵ >0, c<1, portanto Caso 3 (confirmado)

Então T(n)=()